Филиал «УдГУ» в городе Воткинске

Кафедра «Информационных и инженерных технологий»

ГОРОДСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

1. Найти значение выражения $\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48–10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$

2. Рыбак, плывший на катере против течения реки, не заметил, что с борта катера в воду упал спасательный круг. Он обнаружил пропажу через полчаса и повернул обратно. Чтобы поскорее догнать круг, он увеличил рабочую мощность двигателя так, что собственная скорость катера (то есть его скорость относительно воды) возросла в полтора раза. В итоге рыбак догнал круг на расстоянии 2,5 км от того места, где круг упал. Какова скорость течения?

3. Существуют ли восемь натуральных чисел, среди которых ровно одно делится на 8, ровно два делятся на 7, ровно три — на 6, . . . , ровно семь — на 2?

4. Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

5. Вычислить сумму с точностью до сотых

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{2\*6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{4\*8}+\frac{1}{45}+…+\frac{1}{2019\*2023}$$

6. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения

$x^{2}–\left(m+1\right)x+m–1=0$ является наименьшей?

7. Точка X расположена на диаметре AB окружности радиуса R. Точки K и N лежат на окружности в одной полуплоскости относительно AB, а $∠ $KXA = $∠$NXB = 60◦ . Найдите длину отрезка KN

Решение задач:

1. Найти значение выражения $\sqrt{4+\sqrt{5\sqrt{3}+5\sqrt{48–10\sqrt{7+4\sqrt{3}}}}}$

Указания выделить полный квадрат $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$

Ответ: 3

2. Рыбак, плывший на катере против течения реки, не заметил, что с борта катера в воду упал спасательный круг. Он обнаружил пропажу через полчаса и повернул обратно. Чтобы поскорее догнать круг, он увеличил рабочую мощность двигателя так, что собственная скорость катера (то есть его скорость относительно воды) возросла в полтора раза. В итоге рыбак догнал круг на расстоянии 2,5 км от того места, где круг упал. Какова скорость течения?

**Решение.** Будем рассматривать движение катера относительно течения реки. При таком рассмотрении круг, плывущий по течению, неподвижен. Поскольку при возвращении назад скорость катера относительно течения возросла в 1,5 раза, то время, затраченное на возвращение к кругу, уменьшилось в 1,5 раза и составило 20 минут. Общее время свободного движения круга составило 50 минут, то есть 5/6 часа, и за это время круг проплыл относительно берега 2,5 км.

Ответ: 3 км/ч

3. Существуют ли восемь натуральных чисел, среди которых ровно одно делится на 8, ровно два делятся на 7, ровно три — на 6, . . . , ровно семь — на 2?

Ответ. Не существуют. Предположим, что такие восемь чисел найдутся. Из условия следует, что ровно одно из них не делится на 2 и ровно два из них не делятся на 3. Значит, среди рассматриваемых чисел не менее пяти чисел делятся и на 2, и на 3, т. е. делятся на 6. Но по условию чисел, делящихся на 6, должно быть ровно три. Противоречие

4. Две хорды окружности взаимно перпендикулярны. Докажите, что расстояние от точки их пересечения до центра окружности равно расстоянию между их серединами.

**Первый способ**. ON. Из равенства прямоугольных треугольников OMK и KNO (по⊥ CD, то ON || AB. Аналогично докажем, что OM || CD. Следовательно, OM ⊥CD, а т.к. AB ⊥Пусть O - центр окружности, AB и CD - данные хорды, не являющиеся диаметрами, M и N - их середины, K - точка пересечения хорд. Прямая ON проходит через середину хорды CD, поэтому ON гипотенузе и острому углу) следует, что KN = MO, значит, прямоугольные треугольники KOM и NMO равны по двум катетом. Следовательно, OK = MN.

**Второй способ**. точка− их середины, K − данные хорды, M и N − центр окружности, AB и CD −Пусть O прямоугольник, следовательно, его диагонали−пересечения хорд. Четырехугольник OMKN OK и MN равны между собой.

5. Вычислить сумму с точностью до сотых

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{2\*6}+\frac{1}{21}+\frac{1}{4\*8}+\frac{1}{45}+…+\frac{1}{2019\*2023}$$

$$\frac{1}{n\left(n+4\right)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+4}\right)⇒$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{2\*6}+\frac{1}{3\*7}+\frac{1}{4\*8}+\frac{1}{5\*9}+…+\frac{1}{2019\*2023}⟹$$

$$=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}…-\frac{1}{2023}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2020}-\frac{1}{2021}-\frac{1}{2022}-\frac{1}{2023}\right)$$

6. При каком значении параметра m сумма квадратов корней уравнения

x2 – (m+1)x + m – 1 = 0 является наименьшей?



7. Точка X распложена на диаметре АВ окружности радиуса R. Точки K и N лежат на окружности в одной полуплоскости относительно АВ, а ∟KXA=∟ NXB=60. Найдите длину отрезка KN/

